

近似直線

物理アスキス

Section 0: Contents

1	近似直線	2
1.1	近似直線 (回帰直線) とは	2
1.2	近似直線の計算法 (最小二乗法)	3
1.3	近似直線の不確かさ	4
2	エクセルの活用	5
2.1	近似直線の出し方	5

Section 1: 近似直線

1.1 近似直線 (回帰直線) とは

物理現象が理論的に一次関数になる。このような状況で理論と実験を照らし合わせるための手法である。例えば、フックの法則がそれにあたる。

$$F = kx$$

実験で、力 F とばねの伸び x を計測したとして、以下の結果が得られた場合を考える。

Table 1: バネの力と変位の実験データ

変位 x [m]	力 F [N]
0.00	0.03
0.10	0.30
0.20	0.59
0.30	0.94
0.40	1.17
0.50	1.50
0.60	1.85
0.70	2.08
0.80	2.41
0.90	2.68
1.00	3.02

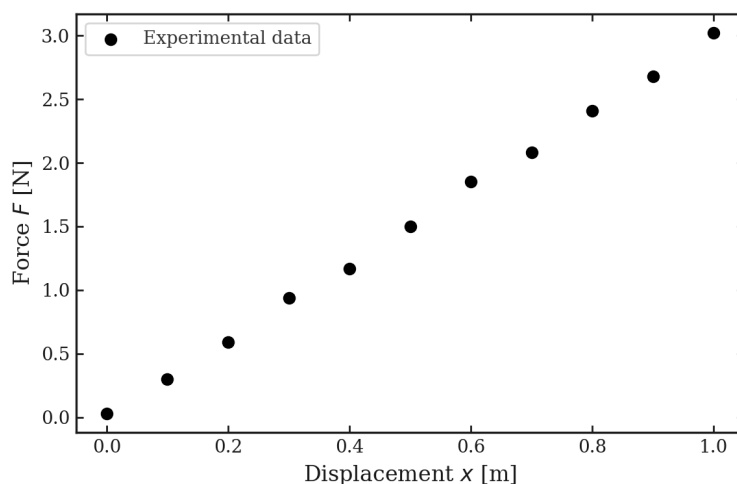


Figure 1: バネの力と変位の実験データ



ここにふさわしい直線を計算することができ、今回の場合は

$$F = (2.99 \pm 0.03)x + (0.011 \pm 0.015)$$

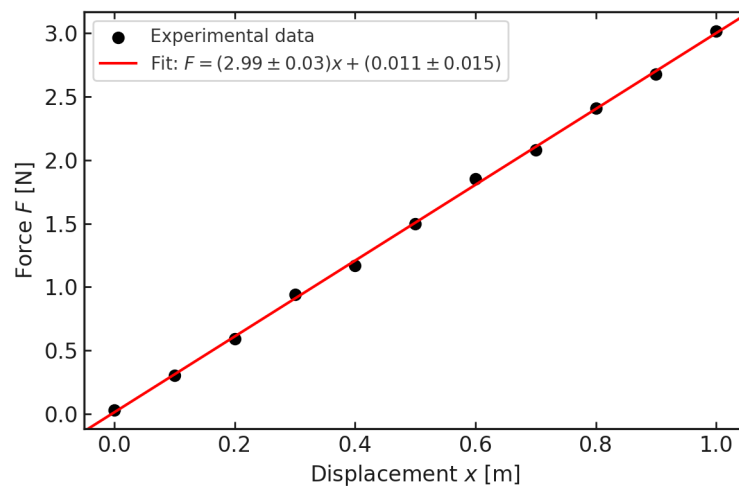


Figure 2: バネの力と変位の実験データ 2

となる。次の章で具体的な計算法を見る。

1.2 近似直線の計算法 (最小二乗法)

次のような状況を考える。

Table 2: 理論的に一次関数になる N 個の実験データ

Y [unit]	X [unit2]
y_1	x_1
y_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$
y_k	x_k
$\vdots$	$\vdots$
y_N	x_N

次を計算しておく。

$$S_X = \sum_{k=1}^N x_k, \quad S_Y = \sum_{k=1}^N y_k, \quad S_{X^2} = \sum_{k=1}^N x_k^2, \quad S_{Y^2} = \sum_{k=1}^N y_k^2, \quad S_{XY} = \sum_{k=1}^N x_k y_k$$

このような実験結果が、どんな一次関数できるかは、次の式でもとまる。傾きと切片は

$$a = \frac{NS_{XY} - S_X S_Y}{NS_{X^2} - S_X^2}, \quad b = \frac{S_{X^2} S_Y - S_X S_{XY}}{NS_{X^2} - S_X^2}$$

で計算できる。しかし、これではこのデータの信用度がわからない。不確かさを計算する必要がある。 $S_X^2 \neq S_{X^2}$ に注意。

1.3 近似直線の不確かさ

不確かさは、次の式で求められる。実際に具体例で計算すると身につくかもしれない。

$$\sigma_{\bar{a}} = \sigma_{\bar{Y}} \sqrt{\frac{N}{NS_{X^2} - S_X^2}}, \quad \sigma_{\bar{b}} = \sigma_{\bar{Y}} \sqrt{\frac{S_{X^2}}{NS_{X^2} - S_X^2}}$$

ただし $\sigma_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{k=1}^N (y_k - ax_k - b)^2}$

まとめて、次のように表記する。有効数字は、不確かさの慣例に従う。

$$Y = (a \pm \sigma_{\bar{a}}) X + (b \pm \sigma_{\bar{b}})$$



Section 2: エクセルの活用

実際に計算するととても時間がかかりめんどうなことがわかる。エクセルを使うと簡単に計算できるのでその一例を紹介しよう。

2.1 近似直線の出し方

手順 1: エクセルに数値を二列に並べる。

手順 2: 傾きと切片の結果を出したいところに

$= \text{LINEST}(Y \text{ のデータを選択}, X \text{ のデータを選択})$

を入力すると、左に傾き、右に切片が出力される。

手順 3: 傾きと切片の不確かさを出したいところに

$= \text{INDEX}(\text{LINEST}(Y \text{ のデータを選択}, X \text{ のデータを選択}, \text{TRUE}, \text{TRUE}), 2)$

を入力すると、左に傾き、右に切片の不確かさが出力される。

一度自分で計算したものと比べて見ると、理解が深まるかもしれない。